Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

Carnet: ______________________

Nombre: ______________________

Sección: ______________________

MA-1112 —Tercer Parcial, Martes 8-04-2008. (40 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo C

1. (10 ptos.)

   a) (5 ptos.) Halle la integral

$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$$

Solucion: Sea $I = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$. Utilizando el metodo de Integración por partes y tomando $u = \ln(x)$ y $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Tenemos que $du = \frac{dx}{x}$ y $v = 2\sqrt{x}$.
Asi, $I = 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + K$.

   b) (5 ptos.) Demuestre que

$$\int x^m \operatorname{sen}(x)dx = -x^m \cos(x) + m\int x^{m-1}\cos(x)dx.$$

Solucion: Utilizando integracion por partes, sea $u = x^m$ y $dv = \operatorname{sen}(x)dx$, tenemos que $du = mx^{m-1}dx$ y $v = -\cos(x)$. Asi,

$$\int x^m \operatorname{sen}(x)dx = -x^m \cos(x) + m\int x^{m-1}\cos(x)dx.$$

2. (10 ptos.) Halle la siguiente integral

$$\int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2}dx$$

Solucion: Escribimos las fracciones simples asociadas

$$\frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{(2x+3)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

de aqui,

$$\frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(2x+3)(x+1) + C(2x+3)}{(2x+3)(x+1)^2}$$

es decir,

$$x^2 - 3x - 7 = A(x+1)^2 + B(2x+3)(x+1) + C(2x+3)$$

con lo que se tiene

$$A = -1, \qquad B = 1, \qquad C = -3.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}dx &= \int \left(\frac{-1}{(2x+3)} + \frac{1}{(x+1)} + \frac{-3}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{-dx}{(2x+3)} + \int \frac{dx}{(x+1)} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|2x+3| + \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.\end{aligned}$$

3. (10 ptos.) Halle la integral indefinida

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}dx.$$

Solucion:

Considerando la sustitucion trigonometrica $x = \operatorname{sen}(\theta)$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $dx = \cos(\theta)d\theta$, tenemos que

$$\begin{aligned}\textstyle\int x^3\sqrt{1-x^2}dx &= \textstyle\int \operatorname{sen}^3(\theta)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\ &= \textstyle\int \operatorname{sen}^3(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \textstyle\int \operatorname{sen}(\theta)(1-\cos^2(\theta))\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \textstyle\int \operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta - \int \operatorname{sen}(\theta)\cos^4(\theta)d\theta \\ &= \tfrac{-\cos^3(\theta)}{3} + \tfrac{\cos^5(\theta)}{5} + K \\ &= -\tfrac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} + \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5} + K.\end{aligned}$$

4. (10 ptos.)

a) (5 ptos.) Estudie la convergencia o divergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(4t)}{t^3}dt.$$

Solucion: Es conocido que $0 \le \operatorname{sen}^2(4t) \le 1$ y dado que $t \in [1, +\infty)$ tenemos que $\frac{\operatorname{sen}^2(4t)}{t^3} \le \frac{1}{t^3}$. Luego, estudiamos la convergencia de la integral de $f(t) = 1/t^3$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{t^3}dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{2t^2}\right)_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ converge; utilizando el críterio de comparación, concluimos que la integral $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(4t)}{t^3}dt$ también converge.

b) (5 ptos.) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\csc(x)-\frac{1}{x}\right).$$

Solucion: Limite con la forma indeterminada $+\infty-\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\csc(x)-\tfrac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\tfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\tfrac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\tfrac{x-\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)} \text{ (forma } \tfrac{0}{0})\\
&\text{(Aplicando L'H)}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\tfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)} \text{ (forma } \tfrac{0}{0})\\
&\text{(Aplicando L'H)}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\tfrac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)} = 0.
\end{aligned}$$